



Balkh International Journal of Natural Science

ISSN – P 0000 -0000 E: 0000- 0000

Vol. 1 NO.2 2025

URL: <https://bjns.ba.edu.af/index.php/bjns>

مقایسه‌ای چندجمله‌ای احاطه‌گر و احاطه‌گر مستقل گراف‌ها

Comparative Analysis of the Domination Polynomial and the Independent Domination Polynomial of Graphs

AUTHORS: Mazharuddin Mehraban ¹ Abdul Jamil Nazary ² Abdulkhaliq qarizada³

1. Teaching Assistant, PhD, Department of Mathematics and Physics, Faculty of Engineering, Balkh University, Mazar-e-Sharif, Afghanistan.

2. Professor- Ph.D, Department of Mathematics, Faculty of Education, Takhar University, Takhar, Afghanistan.

3. Master of Mathematical Statistics, Faculty Member, Faculty of Economics, Taj University, Balkh, , Mazar-e-Sharif, Afghanistan.

Corresponding Author Name: Mazharuddin Mehraban, Balkh University, Mazar-e-Sharif, Afghanistan.

Received: 24/1/2026 Accepted: 7/6/2026 Published: 19/7/2026

ABSTRACT

In this paper, we study and analyze two important polynomials in graph theory, namely the domination polynomial $D(G, x)$ and the independent domination polynomial $Di(G, x)$. We first show that for any simple graph G and any integer i , the corresponding coefficient in the independent domination polynomial is always less than or equal to that in

¹. Email: mehraban@ba.edu.af

Orcid iD:0009-0008-4012-723X

². Email: jamil.nazary0030@gmail.com

Orcid iD:0000-0001-8650-7037

³. Email: qarizadakh@gmail.com

Orcid iD:0009-0000-6640-6642

the domination polynomial; that is, $id(G, i) \leq d(G, i)$. A necessary and sufficient condition for the equality $id(G, i) = d(G, i)$ is also provided, according to which equality holds if and only if every i -element dominating set of the graph is independent. Subsequently, the behavior of the coefficients of these two polynomials and their differences is thoroughly analyzed for classical families of graphs, including paths, cycles, complete graphs, and stars. The obtained results indicate that the independence constraint plays a fundamental role in reducing the number of dominating sets, and the difference between the coefficients of the two polynomials is highly dependent on the structure of the graph. This study provides an analytical framework for comparing domination polynomials and their generalizations based on structural constraints.

Keywords: Comparative analysis, Dominating set, Domination polynomial, Graph theory, Independent dominating set, Independent domination polynomial.

چکیده

در این مقاله، مقایسه‌ی دو چندجمله‌ای مهم در نظریه‌ی گراف، یعنی چندجمله‌ای احاطه‌گر $D(G, x)$ و چندجمله‌ای احاطه‌گر مستقل $Di(G, x)$ ، بررسی و تحلیل می‌شود. نخست نشان داده می‌شود که برای هر گراف ساده‌ی G و هر عدد صحیح i ، ضریب متناظر در چندجمله‌ای احاطه‌گر مستقل همواره کوچکتر یا مساوی ضریب متناظر در چندجمله‌ای احاطه‌گر است؛ یعنی $id(G, i) \leq d(G, i)$. شرط لازم و کافی برای برقراری تساوی $id(G, i) = d(G, i)$ نیز ارائه می‌شود که براساس آن، این تساوی دقیقاً زمانی برقرار است که هر مجموعه‌ی احاطه‌گر i -عضوی گراف، مستقل باشد. در ادامه، رفتار ضرایب این دو چندجمله‌ای و اختلاف آن‌ها برای رده‌های کلاسیک گراف‌ها از جمله گراف مسیر، دور، کامل و ستاره به‌طور دقیق تحلیل می‌شود. نتایج به‌دست آمده نشان می‌دهد که قید استقلال نقش اساسی در کاهش تعداد مجموعه‌های احاطه‌گر دارد و اختلاف ضرایب دو چندجمله‌ای به‌شدت به ساختار گراف وابسته است. این مطالعه چارچوبی تحلیلی برای مقایسه‌ی چندجمله‌ای‌های احاطه‌گر و تعمیم‌های مبتنی بر قیده‌های ساختاری ارائه می‌دهد.

کلمات کلیدی: تحلیل مقایسه‌ای، چندجمله‌ی احاطه‌گر، چندجمله‌ی احاطه‌گر مستقل، مجموعه احاطه‌گر، مجموعه احاطه‌گر مستقل، نظریه‌ی گراف.

۱. مقدمه

اَلْحَمْدُ لِلّٰهِ رَبِّ الْعَالَمِينَ وَالصَّلَاةُ وَالسَّلَامُ عَلَى سَيِّدِ الْمُرْسَلِينَ وَعَلَى آلِهِ وَصَحْبِهِ أَجْمَعِينَ.

مطالعه مجموعه‌های احاطه‌گر یکی از موضوعات بنیادی در نظریهٔ گراف است و نقش مهمی در ریاضیات نظری و کاربردی ایفا می‌کند. مجموعهٔ احاطه‌گر روشی مؤثر برای کنترل، پوشش یا نظارت بر تمامی رأس‌های یک گراف از طریق انتخاب زیرمجموعه‌ای از رأس‌ها فراهم می‌سازد. این مفهوم به دلیل کاربردهای گستردهٔ آن در حوزه‌هایی مانند شبکه‌های مخابراتی، مسائل مکان‌یابی تسهیلات، تخصیص منابع و نظریهٔ بهینه‌سازی، به‌طور وسیع مورد مطالعه قرار گرفته است. فرض کنید (G) یک گراف ساده با مجموعهٔ رأس‌های $V(G)$ باشد. زیرمجموعهٔ $S \subset V(G)$ را مجموعهٔ احاطه‌گر می‌نامند، هرگاه هر رأس $v \in V(G)$ یا عضو (S) باشد و یا به دست‌کم یک رأس از (S) مجاور باشد. کمترین تعداد اعضای چنین مجموعه‌ای را عدد احاطه‌گری گراف (G) می‌نامند و آن را با نماد $\gamma(G)$ نشان می‌دهند. تعیین یک مجموعهٔ احاطه‌گر کمینه از دیدگاه محاسباتی مسئله‌ای دشوار است، زیرا این مسئله در ردهٔ مسائل NP-کامل قرار دارد. این موضوع اهمیت توسعهٔ روش‌های نظری و محاسباتی کارآمد را برای مطالعهٔ آن آشکار می‌سازد (مهربان، ۱۴۰۴).

در سال‌های اخیر، رویکردهای جبری در مطالعهٔ ناوردهای گرافی توجه قابل ملاحظه‌ای را به خود جلب کرده‌اند. در میان این رویکردها، چندجمله‌ای احاطه‌گر که نخستین بار توسط علیخانی و پنگ در سال ۲۰۰۸ معرفی شد، به‌عنوان یک تابع مولد عمل می‌کند که تعداد مجموعه‌های احاطه‌گر با اندازه‌های مختلف را در یک گراف کدگذاری می‌نماید. این چندجمله‌ای اطلاعات ترکیباتی ارزشمندی را در اختیار قرار می‌دهد و برای رده‌های مختلف گراف مورد بررسی واقع شده است. مطالعات انجام‌شده ویژگی‌های ساختاری جالب و کاربردهای متعددی را، به‌ویژه در قابلیت اطمینان شبکه‌ها و بهینه‌سازی ترکیباتی، آشکار ساخته‌اند.

علاوه بر مجموعه‌های احاطه‌گر، مفهوم مجموعه‌های احاطه‌گر مستقل نیز مطرح شده است. مجموعهٔ احاطه‌گر مستقل، مجموعه‌ای احاطه‌گر است که در آن هیچ دو رأسی با یکدیگر مجاور نباشند. چندجمله‌ای احاطه‌گر مستقل که تعداد این مجموعه‌ها را بر حسب اندازهٔ آن‌ها شمارش می‌کند، بینش عمیق‌تری نسبت به ارتباط میان مفاهیم احاطه‌گری و استقلال در گراف‌ها فراهم می‌آورد. با وجود آن‌که چندجمله‌ای احاطه‌گر و چندجمله‌ای احاطه‌گر مستقل هر یک به‌صورت جداگانه در ادبیات پژوهشی مورد مطالعه قرار گرفته‌اند، تحلیل مقایسه‌ای و نظام‌مند میان این دو چندجمله‌ای تاکنون به اندازهٔ کافی بررسی نشده است. این خلأ تحقیقی انگیزهٔ اصلی انجام تحقیق حاضر را تشکیل می‌دهد.

هدف اصلی این مقاله، بررسی و مقایسهٔ چندجمله‌ای احاطه‌گر و چندجمله‌ای احاطه‌گر مستقل گراف‌ها و مطالعهٔ روابط جبری و ترکیباتی میان آن‌ها است. به‌طور خاص، این پژوهش در پی آن است که شرایطی را تعیین کند که در آن‌ها این دو چندجمله‌ای رفتار مشابهی از خود نشان می‌دهند، رده‌هایی از گراف‌ها را که در آن‌ها تفاوت‌های قابل توجهی میان این دو چندجمله‌ای وجود دارد

شناسایی نماید، و تفسیر کند که این تفاوت‌ها چه اطلاعاتی درباره ساختارهای زیربنایی گراف ارائه می‌کند. این مطالعه می‌تواند به درک عمیق‌تر ارتباط میان احاطه‌گری و استقلال در گراف‌ها کمک کرده و زمینه‌ای برای تحقیقات آینده در حوزه چندجمله‌ای‌های گرافی فراهم سازد.

۲. چندجمله‌ای احاطه‌گر و احاطه‌گر مستقل گراف‌ها

۱.۲ مفاهیم پایه و نمادگذاری

منظور از یک گراف در این مقاله، گراف ساده (بدون طوقه و یال چندگانه) و متناهی است که آن را با $G = (V, E)$ نشان می‌دهیم. V مجموعه رئوس و E مجموعه ضلع‌ها آن است. همچنین یال‌ها بدون جهت فرض می‌شوند. اگر $|V| = n$ ، آنگاه گوییم گراف G از مرتبه n است (مهربان، ۱۴۰۴). فرض کنیم G یک گراف، u و v دو رأس دلخواه از آن هستند. دو رأس u و v در گراف G مجاور هستند، هرگاه دو سر یک یال باشند. یال بین آن‌ها را با uv نشان می‌دهیم. همسایگی باز رأس v ، $N(v)$ رئوسی از G است که با v مجاور است، به عبارت دیگر $N(v) = \{u \in V(G) \mid uv \in E(G)\}$ و درجه رأس v را با $d(v)$ نشان داده و برابر با $|N(v)|$ است. همچنین منظور از همسایگی بسته رأس v ، مجموعه $N(v) \cup \{v\}$ است که آن را با $N[v]$ نشان می‌دهیم. برای یک مجموعه $S \subseteq V(G)$ ، همسایگی باز S ، $N(S) = \bigcup_{v \in S} N(v)$ و همسایگی بسته S ، $N[S] = N(S) \cup S$ تعریف می‌شود (مهربان، ۱۴۰۴).

رأس v را رأس تنها گوییم، هرگاه $d(v) = 0$. گراف G را k -منتظم می‌نامند، هرگاه درجه همه رئوس آن k باشد.

در این مقاله، $\delta(G)$ و $\Delta(G)$ به ترتیب نشان‌دهنده کمترین درجه و بیشترین درجه در گراف G هستند. همچنین گراف‌های مسیر n رأسی، گراف کامل n رأسی، گراف چندبخشی کامل با بخش‌های $r_1, r_2, \dots, r_k$ رأسی و گراف تهی n رأسی (مکمل گراف کامل n رأسی) را به ترتیب با نمادهای $P_n, K_n, K_{r_1, r_2, \dots, r_k}$ نشان می‌دهیم.

یک رأس u در مجموعه S از رئوس گراف G یک همسایه خصوصی (نسبت به S) دارد اگر $\bar{u}$ هیچ همسایه‌ای در S نداشته باشد یا (ب) رأسی به نام $v \in V \setminus S$ وجود داشته باشد که همسایه u باشد اما همسایه هیچ رأس دیگری در S نباشد.

دو گراف G و H را ایزومورفیزم می‌گوئیم (می‌نویسیم $G \cong H$)، هرگاه یک تناظر یک‌به‌یک مانند f بین رئوس G و H وجود داشته باشد، به طوری که $uv \in E(G)$ اگر و فقط اگر $f(u)f(v) \in E(H)$.

یک یکریختی که گرافی را به خودش می‌نگارد، اتومورفیزم نامیده می‌شود. مجموعه تمام خودریختی‌های گراف G همراه با عمل ترکیب توابع تشکیل یک گروه می‌دهد. این گروه که با $Aut(G)$ نشان داده می‌شود را گروه خودریختی‌های گراف G می‌نامند (مهربان، ۱۴۰۴).

زیر مجموعه رئوس گراف G ، $S \subseteq V(G)$ را یک مجموعه مستقل در G نامیم، هرگاه دو رأس انتهایی هیچ ضلعی از G در S نباشد. به عبارت دیگر هیچ دو عضو S باهم مجاور نباشد. ماکزیمم اندازه مجموعه مستقل در گراف G را با $\alpha(G)$ نشان داده و آن را عدد استقلال G می‌نامند. مجموعه تهی $(\emptyset)$ یک مجموعه مستقل برای هر گراف است. مجموعه پوشش رأسی گراف، زیرمجموعه‌ای از رأس‌های گراف است که برای هر ضلع گراف، حداقل یکی از دو رأس آن یال در این مجموعه قرار دارد. کمترین تعداد رأس ممکن با این خاصیت را عدد پوششی می‌گوییم (مهربان، ۱۴۰۴).

۲.۲ چند جمله‌ای احاطه‌گر گراف‌ها

در این بخش، به معرفی و بررسی چندجمله‌ای‌های غالب برخی از گراف‌های خاص پرداخته می‌شود. همچنین روش‌های مختلف محاسبه و تحلیل این مفاهیم در گراف‌ها مطرح می‌گردد و برخی ویژگی‌های این چندجمله‌ای را در قالب قضیه‌های ارائه‌شده بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۲ تابع مولد تعداد مجموعه‌های غالب گراف G برابر یک چندجمله‌ای است که به آن چندجمله‌ای غالب می‌گویند. به عبارت دیگر، چندجمله‌ای غالب $D(G, x)$ ، گراف G به صورت

$$D(G, x) = \sum_{i=\gamma(G)}^{|V(G)|} d(G, i) x^i$$

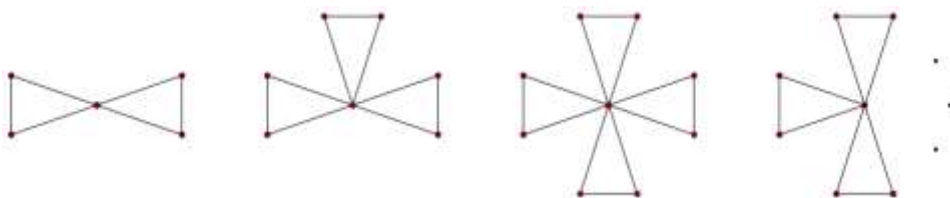
تعریف می‌شود که در آن $\gamma(G)$ عدد غالب گراف G است (مهربان و علیخانی، ۱۴۰۴).

به‌عنوان مثال، با توجه به تعریف چندجمله‌ای‌های غالب، برای گراف کامل و ستاره داریم:

$$D(K_n, x) = (1+x)^n - 1 \quad (\text{الف})$$

$$D(K_{1,n}, x) = x^n + x(1+x)^n \quad (\text{ب})$$

حال می‌خواهیم چند جمله‌ای احاطه‌گر گراف‌های دوستانه و تعمیم یافته آنها را بررسی و قضایایی



مرتبط به آن را اثبات می‌نمایم. گراف دوستانه یا آسیاب بادی هلند را با سمبول F_n نشان داده و گرافی است که از به هم پیوستن n نسخه از گراف دور C_3 به طول سه با یک رأس مشترک ساخته می‌شود. قضیه دوستانه در بیان می‌کند گراف‌هایی با این خاصیت که هردو رأس دقیقاً یک همسایه مشترک داشته باشند، گراف‌های دوستانه هستند. شکل ۲ نمونه‌های از گراف‌های دوستانه را نشان می‌دهد.

شکل ۲: از چپ، گراف‌های دوستانه F_2, F_3, F_4 و F_n

قضیه ۲.۲ برای هر $n \in N$.

$$D(F_n, x) = (2x + x^2)^n + x(1 + x)^{2n}.$$

اثبات. چون می دانیم که گراف $F_n = K_1 \vee nK_2$ از الحاق گراف های K_1 و nK_2 حاصل می شود و این که $D(K_2, x) = x^2 + x$ و $D(K_1, x) = x$ داریم:

$$\begin{aligned} D(F_n, x) &= D(K_1 \vee nK_2, x) \\ &= (1 + x - 1)^1 ((1 + x)^{2n} - 1) + x + (2x + x^2)^n \\ &= (2x + x^2)^n + x(1 + x)^{2n}. \end{aligned}$$

۲.۳ چند جمله ای احاطه گر مستقل گراف ها

مشابه تعریف چندجمله ای غالب گراف ها، چندجمله ای غالب مستقل گراف را نیز به صورت زیر تعریف می نمایم.

تعریف ۲.۳ چندجمله ای غالب مستقل گراف G را با $D_i(G, x)$ نشان داده و به صورت

$$D_i(G, x) = \sum_{k=\gamma_i(G)}^{\alpha(G)} d_i(G, k) x^k$$

تعریف می شود که در آن $\gamma_i(G)$ عدد غالب مستقل G و $d_i(G, k)$ تعداد مجموعه های غالب مستقل گراف G با کاردینال k است. بنابراین، $D_i(G, x)$ تابع مولد تعداد مجموعه های غالب مستقل است. هر ریشه $D_i(G, x)$ را ریشه چندجمله ای غالب مستقل گراف G گوئیم. صفر ریشه تمام چندجمله ای های غالب مستقل گراف G است (علیخانی و سلطانی، ۱۴۰۴).

اکنون چندجمله ای غالب مستقل مسیرها و برخی گراف های مرتبط با مسیر را شمارش نموده و با قضیه زیر بیان می داریم.

قضیه ۲.۴ برای هر $n \geq 4$.

$$\begin{aligned} D_i(P_n, x) &= xD_i(P_{n-2}, x) + xD_i(P_{n-3}, x) \\ D_i(P_3, x) &= x^2 + x, D_i(P_2, x) = 2x, D_i(P_1, x) = x \end{aligned}$$

که در آن

اثبات. اگر اولین رأس مسیر در یک مجموعه غالب مستقل باشد، آنگاه دومین رأس غالب می شود و بنابراین نمی تواند در مجموعه غالب مستقل باشد. این حالت توسط $xD_i(P_{n-2}, x)$ شمارش خواهد شد. اگر اولین رأس در مجموعه غالب مستقل نباشد، آنگاه دومین رأس باید در مجموعه غالب مستقل باشد. این حالت $xD_i(P_{n-3}, x)$ را می دهد و بنابراین قضیه اثبات می شود (مهربان و علیخانی، ۱۴۰۴).

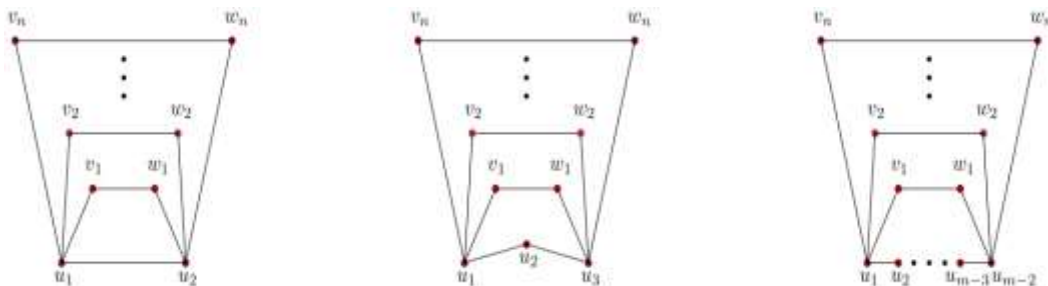
برای دو عدد صحیح $n \geq 2$ و $m \geq 4$ ، گراف کتابی B_n به صورت زیر تعریف می شود:

$$E(B_n) = \{u_1 u_2\} \cup \quad \text{و} \quad V(B_n) = \{u_1, u_2\} \cup \{v_i, w_i: 1 \leq i \leq n\}$$

$\{u_1 v_i, u_2 w_i, v_i w_i: 1 \leq i \leq n\}$ گراف کتابی تعمیم یافته $B_{n,m}$ را با مجموعه های رأس و یال

$$V(B_{n,m}) = \{u_i: 1 \leq i \leq m-2\} \cup \{v_i, w_i: 1 \leq i \leq n\}$$

زیر در نظر می گیریم:

$$E(B_{n,m}) = \{u_i u_{i+1}: 1 \leq i \leq m-3\} \cup \{u_{m-2}, w_j: 1 \leq j \leq n\} \cup$$


$\{v_i w_i: 1 \leq i \leq n\}$ (شکل ۳ را ببینید). در اینجا، ما به بررسی مجموعه های غالب مستقل گراف های کتابی و گراف های کتابی تعمیم یافته پرداخته و تعداد مجموعه های غالب مستقل این گراف ها را شمارش می کنیم.

شکل ۳: به ترتیب گراف های $B_{n,m}$ و $B_n, B_{n,5}$

لم زیر فرمولی برای چندجمله ای غالب مستقل گراف کتابی ارائه می دهد.

لم 5.2 چندجمله ای غالب مستقل گراف کتاب B_n ، برای $n \geq 2$ ، به صورت زیر است.

$$D_i(B_n, x) = (2^n - 2)x^n + 2x^{n+1}.$$

اثبات. کافی است نشان دهیم که هر مجموعه غالب مستقل در این گراف مرتبه n یا $n+1$ دارد، و این مجموعه ها دقیقاً یک بار در عبارت بالا شمارش شده اند.

مجموعه های غالب مستقل با این دو حالت ایجاد می شوند:

- انتخاب حداقل یک رأس از مجموعه $\{v_i\}$ و حداقل یک رأس از مجموعه $\{w_i\}$. توجه داشته باشید که مجموعه های غالب مستقل از این نوع، مرتبه n دارند.
- انتخاب رأس u_1 (یا به طور متقارن u_2)، و سپس انتخاب تمام رأس های w_i (یا به طور متقارن همه v_i). مجموعه های غالب مستقل از این نوع، مرتبه $n+1$ دارند.

بخش (i) با جمله $(2n-2)x^n$ مطابقت دارد و بخش (ii) با جمله $2x^{n+1}$ متناظر است. بنابراین، نتیجه حاصل می شود.

قضیه ۲.۶. چندجمله ای غالب مستقل گراف کتابی تعمیم یافته $B_{n,m}$ برای $n \geq 2$ ، $m \geq 5$ به صورت زیر است:

$$D_i(B_{n,m}, x) = (2n - 2)x^n Di(P_{m-4}, x) + 2x^{n+1} Di(P_{m-5}, x) + (x^2 + 2x^{n+1}) Di(P_{m-6}, x).$$

اثبات. کافی است نشان دهیم که هر مجموعه غالب مستقل دقیقاً یک بار در عبارت بالا محاسبه شده است. مجموعه‌های غالب مستقل از هر اندازه‌ای یکی از حالت‌های زیر را دارند.

۱. حداقل یک v_i و حداقل یک w_i را انتخاب کنید، و سپس هر مجموعه غالب مستقلی از گراف القا شده $\langle u_2, u_3, \dots, u_{m-3} \rangle$ را انتخاب کنید. در این حالت، مجموعه غالب مستقل هیچ‌کدام از رأس‌های u_1 و u_{m-2} را شامل نمی‌شود.

۲. همه‌ی w_i و رأس u_2 (یا به جای آن، همه‌ی v_i و رأس u_{m-3}) را انتخاب کنید، سپس هر مجموعه غالب مستقلی از گراف القا شده $\langle u_4, \dots, u_{m-3} \rangle$ (یا به جای آن، $\langle u_2, u_3, \dots, u_{m-5} \rangle$) را انتخاب کنید، در این حالت، مجموعه غالب مستقل هیچ‌کدام از رأس‌های u_1 و u_{m-2} را شامل نمی‌شود.

۳. رأس u_1 (یا رأس u_{m-2}) را انتخاب کنید، سپس همه‌ی w_i (یا به جای آن، همه‌ی v_i) را انتخاب کنید، و سپس هر مجموعه غالب مستقلی از گراف القا شده $\langle u_3, \dots, u_{m-3} \rangle$ (یا به جای آن، $\langle u_2, u_3, \dots, u_{m-4} \rangle$) را انتخاب کنید. در این حالت، مجموعه غالب مستقل یکی از رأس‌های u_1 یا u_{m-2} را شامل می‌شود.

۴. رأس‌های u_1 و u_{m-2} را انتخاب کنید و سپس هر مجموعه غالب مستقلی از گراف القا شده $\langle u_3, u_4, \dots, u_{m-4} \rangle$ را انتخاب کنید. در این حالت، مجموعه غالب مستقل هر دو رأس u_1 و u_{m-2} را شامل می‌شود.

قسمت (۱) معادله عبارت $(2n - 2)x^n Di(P_{m-4}, x)$ است، قسمت (۲) معادله عبارت $2x^{n+1} Di(P_{m-5}, x)$ است، قسمت (۳) معادله عبارت $2x^{n+1} Di(P_{m-6}, x)$ است، و قسمت (۴) معادله عبارت $x^2 Di(P_{m-6}, x)$ است (جهری و علیخانی، ۲۰۲۲).

قضیه 7.2. برای $n \geq 2$ ، چندجمله‌ای غالب مستقل گراف دوستی F_n به صورت زیر است:

$$D_i(F_n, x) = x + (2x)^n.$$

3. احاطه‌گر و احاطه‌گر مستقل نتایج مقایسه‌ای میان چندجمله‌ای

در این بخش، به بررسی و تحلیل مقایسه‌ای دو چندجمله‌ای احاطه‌گر و احاطه‌گر مستقل گراف‌ها می‌پردازیم. با وجود آن‌که هر دو چندجمله‌ای به شمارش مجموعه‌های احاطه‌گر مرتبطاند، قید استقلال در تعریف چندجمله‌ای احاطه‌گر مستقل موجب ایجاد تفاوت‌های ساختاری و شمارشی

معناداری میان این دو مفهوم می‌شود. هدف اصلی این بخش، تبیین این تفاوت‌ها از طریق مقایسه ضرایب، تعیین شرایط تساوی، و بررسی رفتار این چندجمله‌ای‌ها بر روی رده‌های مختلف گراف‌ها است.

از آن‌جا که هر مجموعه احاطه‌گر مستقل به‌طور طبیعی یک مجموعه احاطه‌گر است، انتظار می‌رود میان ضرایب دو چندجمله‌ای روابط نابرابری بنیادینی برقرار باشد. در ادامه، ابتدا این روابط به‌صورت کلی برای گراف‌های دلخواه بررسی می‌شوند و سپس پیامدهای آن‌ها در قالب قضایا و مثال‌های مشخص ارائه می‌گردد.

۱.۳ مقایسه ضرایب

در قضیه‌ی زیر، برقراری یک نابرابری بنیادی میان ضرایب چندجمله‌ای احاطه‌گر و چندجمله‌ای احاطه‌گر مستقل برای هر گراف ساده و هر اندازه‌ی ممکن مجموعه‌های احاطه‌گر است را نشان می‌دهیم.

قضیه ۱.۳ برای هر گراف ساده G و هر عدد صحیح i ، داریم

$$id(G, i) \leq d(G, i).$$

اثبات. فرض کنید $D \in \mathcal{ID}(G, i)$ یک مجموعه احاطه‌گر مستقل i -عضوی از گراف G باشد. بر اساس تعریف، D دارای دو ویژگی اساسی است: نخست آن‌که برای هر رأس $v \in V(G) \setminus D$ ، رأسی مانند $u \in D$ وجود دارد به‌طوری‌که $uv \in E(G)$ ، و دوم آن‌که هیچ دو رأس متمایز $u, v \in D$ با یکدیگر مجاور نیستند. در نتیجه، مجموعه D به‌طور خاص شرط احاطه‌گری را ارضا می‌کند و بنابراین $D \in \mathcal{D}(G, i)$.

از آن‌جا که هر عنصر دلخواه از $\mathcal{ID}(G, i)$ عضوی از $\mathcal{D}(G, i)$ است، داریم

$$\mathcal{ID}(G, i) \subseteq \mathcal{D}(G, i).$$

با در نظر گرفتن کاردینال این دو خانواده از مجموعه‌ها، نتیجه می‌گیریم که

$$id(G, i) = |\mathcal{ID}(G, i)| \leq |\mathcal{D}(G, i)| = d(G, i),$$

که نابرابری مورد نظر را ثابت می‌کند.

اکنون این پرسش طبیعی مطرح می‌شود که تحت چه شرایطی شمول $\mathcal{ID}(G, i) \subseteq \mathcal{D}(G, i)$ به یک تساوی تبدیل می‌شود. قضیه‌ی زیر پاسخی دقیق به این پرسش ارائه می‌دهد.

قضیه ۱.۳.۲ برای یک گراف ساده G و عدد صحیح i ، رابطه

$$id(G, i) = d(G, i)$$

اگر و تنها اگر هر مجموعه احاطه‌گر i -عضوی گراف G مستقل باشد برقرار است.

اثبات. ابتدا فرض کنید $id(G, i) = d(G, i)$. در این صورت، از قضیه‌ی قبل داریم

$$ID(G, i) \subseteq D(G, i) \quad |ID(G, i)| = |D(G, i)|.$$

بنابراین، این دو خانواده از مجموعه‌ها باید برابر باشند، یعنی

$$ID(G, i) = D(G, i).$$

در نتیجه، هر مجموعه احاطه‌گر i -عضوی الزاماً مستقل است.

برعکس، فرض کنید هر مجموعه احاطه‌گر i -عضوی گراف G مستقل باشد. در این حالت، هر عضو از $D(G, i)$ به‌طور خودکار عضوی از $ID(G, i)$ است، و از سوی دیگر طبق تعریف داریم
 $ID(G, i) \subseteq D(G, i)$ پس

$$ID(G, i) = D(G, i)$$

و در نتیجه

$$id(G, i) = d(G, i).$$

اثبات کامل شد.

مثال ۱.۳.۳. گراف مسیر P_3 را در نظر بگیرید. این گراف دارای سه رأس v_1, v_2, v_3 و دو یال v_1v_2 و v_2v_3 است. مجموعه $\{v_1, v_2\}$ یک مجموعه احاطه‌گر ۲-عضوی برای P_3 است، اما مستقل نیست، زیرا v_1 و v_2 مجاورند. در مقابل، مجموعه‌های احاطه‌گر مستقل ۲-عضوی این گراف محدودتر هستند.

بنابراین،

$$id(P_3, 2) < d(P_3, 2),$$

و در نتیجه نابرابری قضیه‌ی ۴.۱ در این گراف نابرابری سخت strict است.

4.2 بررسی تساوی ضرایب در رده‌های خاص گراف‌ها

در این زیربخش، شرط تساوی $id(G, i) = d(G, i)$ را برای رده‌های کلاسیک گراف‌ها بررسی می‌کنیم. هدف، شناسایی ساختارهایی است که در آن‌ها هر مجموعه احاطه‌گر به‌طور خودکار مستقل بوده و در نتیجه نابرابری قضیه‌ی ۴.۱ به تساوی تبدیل می‌شود.

نتیجه ۱.۴.۱. برای گراف کامل K_n داریم:

$$id(K_n, i) = \begin{cases} n, & i = 1, \\ 0, & i \geq 2, \end{cases}$$

و همچنین

$$d(K_n, i) = \binom{n}{i}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

اثبات. در گراف کامل K_n ، هر دو رأس متمایز مجاور هستند. بنابراین هیچ مجموعه‌ای با دو یا چند رأس نمی‌تواند مستقل باشد و تنها مجموعه‌های مستقل، مجموعه‌های تک‌عضوی هستند. به همین دلیل:

$$id(K_n, i) = 0 \quad \forall i \geq 2,$$

و $id(K_n, 1) = n$ ، زیرا هر رأس به تنهایی یک مجموعه احاطه‌گر مستقل است. از سوی دیگر، هر مجموعه غیرتهی از رأس‌های K_n یک مجموعه احاطه‌گر است، زیرا هر رأسی که در مجموعه نباشد، با همه رأس‌های مجموعه مجاور است. بنابراین تعداد مجموعه‌های احاطه‌گر i -عضوی برابر است با:

$$d(K_n, i) = \binom{n}{i}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

نتیجه نهایی این است که برای $i \geq 2$,

$$id(K_n, i) = 0 < \binom{n}{i} = d(K_n, i),$$

و برای $i = 1$,

$$id(K_n, 1) = d(K_n, 1) = n.$$

مشاهده ۱.۴.۲. برای گراف مسیر P_n با n رأس داریم:

$$id(P_n, i) = d(P_n, i) \quad \text{اگر و تنها اگر } i = 1,$$

و برای هر $2 \leq i \leq n$ نابرابری سخت برقرار است، یعنی

$$id(P_n, i) < d(P_n, i).$$

اثبات. گراف مسیر P_n گرافی است با مجموعه رأس‌های $v_1, v_2, \dots, v_n$ و یال‌های $1 \leq i \leq n-1$ $\{v_i v_{i+1} | 1 \leq i \leq n-1\}$.

برای $i = 1$ ، هر رأس به تنهایی یک مجموعه احاطه‌گر است، زیرا هر رأس حداکثر با دو رأس دیگر مجاور است و انتخاب هر رأس تمام گراف را احاطه می‌کند. از سوی دیگر، هر مجموعه تک‌عضوی به‌طور بدیهی مستقل است. بنابراین:

$$id(P_n, 1) = d(P_n, 1) = n.$$

برای $i = n$ ، تنها مجموعه احاطه‌گر، مجموعه $V(P_n)$ است، اما از آن‌جا که در گراف مسیر یال‌هایی میان رأس‌ها وجود دارد، این مجموعه مستقل نیست. در نتیجه:

$$id(P_n, n) = 0 \quad \text{و} \quad d(P_n, n) = 1.$$

اکنون فرض کنید $2 \leq i \leq n-1$. در این حالت، مجموعه‌های احاطه‌گر i -عضوی وجود دارند که شامل رأس‌های مجاور هستند و بنابراین مستقل نیستند. در نتیجه، همه مجموعه‌های احاطه‌گر i -عضوی مستقل نیستند و داریم:

$$id(P_n, i) < d(P_n, i).$$

این امر اثبات را کامل می‌کند.

مشاهده ۱.۴.۳. برای گراف دور C_n داریم:

$$id(C_n, i) \leq d(C_n, i), \quad 1 \leq i \leq n,$$

و تساوی تنها برای $i = 1$ یا در برخی گراف‌های کوچک (مثلاً C_3) برقرار است.

اثبات. گراف دور C_n شامل رأس‌های $v_1, v_2, \dots, v_n$ با یال‌های $v_i v_{i+1}$ (و $v_n v_1$) است.

مجموعه‌های احاطه‌گر مستقل محدود هستند، زیرا دو رأس مجاور نمی‌توانند همزمان در مجموعه باشند. بنابراین، برای بیشتر اندازه‌ها، برخی مجموعه‌های احاطه‌گر شامل رأس‌های مجاور خواهند بود و مستقل نیستند، پس:

$$id(C_n, i) < d(C_n, i), \quad 1 < i < n.$$

برای $i = 1$ ، هر رأس تنها هم مستقل است و هم احاطه‌گر، پس:

$$id(C_n, 1) = d(C_n, 1) = n.$$

برای C_3 نیز مجموعه‌های دو عضوی احاطه‌گر مستقل وجود ندارد، بنابراین تفاوت واضح است.

نتیجه ۱.۴.۴ برای گراف ستاره $K_{1,n}$ با یک رأس مرکزی و n رأس برگ داریم:

$$id(K_{1,n}, i) = \begin{cases} n+1, & i = 1, \\ 0, & i \geq 2, \end{cases}$$

و برای چندجمله‌ای احاطه‌گر:

$$d(K_{1,n}, i) > 0 \quad \text{برای } 1 \leq i \leq n+1.$$

در نتیجه، تساوی $id(K_{1,n}, i) = d(K_{1,n}, i)$ تنها برای $i = 1$ برقرار است.

اثبات. گراف ستاره $K_{1,n}$ شامل یک رأس مرکزی v و n رأس برگ است که هر برگ تنها با رأس مرکزی مجاور است.

ابتدا مجموعه‌های احاطه‌گر مستقل را بررسی می‌کنیم. از آنجا که رأس مرکزی با تمام برگ‌ها مجاور است، هیچ مجموعه‌ای که شامل بیش از یک رأس باشد نمی‌تواند مستقل باشد. بنابراین، تنها مجموعه‌های مستقل ممکن، مجموعه‌های تک‌عضوی هستند.

هر رأس منفرد (چه رأس مرکزی و چه هر یک از برگ‌ها) به تنهایی یک مجموعه احاطه‌گر است، زیرا رأس مرکزی تمام برگ‌ها را احاطه می‌کند و هر برگ نیز رأس مرکزی را احاطه می‌نماید. در نتیجه:

$$id(K_{1,n}, 1) = n+1 \quad \text{و} \quad id(K_{1,n}, i) = 0 \quad \text{برای } i \geq 2.$$

اکنون مجموعه‌های احاطه‌گر را بدون قید استقلال در نظر می‌گیریم. هر مجموعه‌ای که شامل رأس مرکزی باشد یک مجموعه احاطه‌گر است و همچنین مجموعه تمام برگ‌ها نیز یک مجموعه احاطه‌گر است. از این رو، برای هر اندازه $1 \leq i \leq n+1$ ، مجموعه احاطه‌گر i -عضوی وجود دارد و بنابراین:

$$d(K_{1,n}, i) > 0.$$

پس تنها در حالت $i = 1$ تساوی برقرار است و برای همه $i \geq 2$ نابرابری سخت داریم:

$$id(K_{1,n}, i) < d(K_{1,n}, i).$$

۳.۴ نتایج تحلیل چندجمله‌ای‌ها روی گراف‌های خاص

در این بخش، به بررسی چندجمله‌ای احاطه‌گر و چندجمله‌ای احاطه‌گر مستقل روی گراف‌های خاص می‌پردازیم. هدف این است که روابط بین $D(G, x)$ و $D_i(G, x)$ را برای گراف‌های مسیر P_n ، گراف دور C_n ، گراف ستاره $K_{1,n}$ و گراف کامل K_n تحلیل کنیم. با مطالعه این گراف‌ها، الگوهای شمارشی، شرایط برابری ضرایب، و تفاوت‌های ساختاری دو چندجمله‌ای آشکار می‌شوند. این بررسی‌ها همچنین امکان ارائه مثال‌های عینی و مقایسه مستقیم ضرایب $d(G, i)$ و $id(G, i)$ را فراهم می‌آورد.

مشاهده ۲.۳.۴ (گراف مسیر): برای گراف مسیر P_n ، چندجمله‌ای احاطه‌گر $D(P_n, x)$ و چندجمله‌ای احاطه‌گر مستقل $D_i(P_n, x)$ طبق روابط بازگشتی زیر تعریف می‌شوند: هرگاه $D(P_1, x) = x$ و $D(P_2, x) = 2x + x^2$. در این صورت برای $n \geq 3$

همچنین بریا چندجمله‌ای احاطه‌گر مستقل مسیر به صورت بازگشتی هرگاه با مقادیر اولیه $D_i(P_1, x) = x$ ، $D_i(P_2, x) = 2x$ و $D_i(P_3, x) = x + x^2$ باشند، در این صورت برای $n \geq 4$ داریم:

$$D_i(P_n, x) = xD_i(P_{n-2}, x) + xD_i(P_{n-3}, x).$$

گزاره ۳.۳.۴ (گراف دور): برای گراف دور C_n ، می‌توان از رابطه بازگشتی مسیرها استفاده کرد و به کمک روش حذف یک رأس یا یک یال به چندجمله‌ای مسیر کاهش داد. به طور دقیق داریم:

$$D(C_n, x) = D(P_{n-1}, x) + xD(P_{n-3}, x), \quad n \geq 4,$$

$$D_i(C_n, x) = D_i(P_{n-1}, x) + xD_i(P_{n-4}, x), \quad n \geq 5.$$

گزاره ۳.۳.۵ (گراف ستاره): گراف ستاره دارای یک رأس مرکزی و n رأس برگ است. برای آن داریم:

$$D(K_{1,n}, x) = x(1+x)^n + x^n,$$

$$D_i(K_{1,n}, x) = x^n + x,$$

زیرا تنها مجموعه‌های مستقل احاطه‌گر، یا مجموعه برگ‌ها هستند یا رأس مرکزی به تنهایی.

نتیجه ۳.۳.۶ (گراف کامل): برای گراف کامل K_n ، هر دو رأس متمایز مجاورند. بنابراین:

$$D(K_n, x) = (1+x)^n - 1,$$

$$D_i(K_n, x) = nx,$$

چرا که هیچ مجموعه مستقل احاطه‌گر i -عضوی با $i \geq 2$ وجود ندارد و تنها مجموعه‌های تک‌عضوی هر رأس، هم مستقل و هم احاطه‌گر هستند.

۵. نتایج تحلیلی درباره اختلاف ضرایب

در بخش قبل نشان دادیم که ضرایب چندجمله‌ای احاطه‌گر مستقل همواره کمتر یا مساوی ضرایب متناظر در چندجمله‌ای احاطه‌گر هستند. این نابرابری، اگرچه بنیادین است، اما به‌تنهایی میزان تفاوت میان این دو چندجمله‌ای را آشکار نمی‌سازد.

در این بخش، با هدف بررسی کمی این تفاوت، اختلاف ضرایب دو چندجمله‌ای را معرفی کرده و رفتار آن را برای گراف‌های مختلف تحلیل می‌کنیم. این رویکرد امکان مقایسه دقیق‌تر تأثیر قید استقلال بر ساختار مجموعه‌های احاطه‌گر را فراهم می‌آورد و دیدگاهی عمیق‌تر نسبت به رابطه میان این دو مفهوم ارائه می‌دهد.

برای هر گراف ساده G و هر عدد صحیح i ، اختلاف ضرایب دو چندجمله‌ای احاطه‌گر و احاطه‌گر مستقل را به‌صورت

$$\Delta_G(i) := d(G, i) - id(G, i)$$

تعریف می‌کنیم.

نتیجه ۵,۱ برای هر گراف ساده G و هر i داریم $\Delta_G(i) \geq 0$.

قضیه ۵,۲ برای هر گراف ساده G و هر عدد صحیح i ، $\Delta_G(i) = 0$ اگر و تنها اگر هر مجموعه احاطه‌گر i -عضوی گراف G مستقل باشد.

مشاهده ۵,۳ اگر گراف G دارای مجموعه احاطه‌گر i -عضوی غیرمستقل باشد، آنگاه $\Delta_G(i) > 0$.

ملاحظه ۵,۴ رفتار کمیت $\Delta_G(i)$ به‌شدت به ساختار گراف وابسته است. در گراف‌های مانند گراف کامل یا ستاره، شرط استقلال محدودکننده‌تر بوده و اختلاف ضرایب بزرگ‌تر است، در حالی که در گراف‌های مانند مسیرها و دورها، این اختلاف معمولاً کوچک‌تر است.

قضیه ۵,۵ فرض کنید G یک گراف ساده با n رأس باشد و $2 \leq i \leq n$. آنگاه $\Delta_G(i) \leq \binom{n}{i}$ و تساوی زمانی برقرار است که G گراف کامل K_n باشد.

اثبات. بر اساس تعریف، داریم

$$\Delta_G(i) = d(G, i) - id(G, i).$$

از آن جا که هر مجموعه احاطه گر مستقل، یک مجموعه احاطه گر است، همواره $id(G, i) \geq 0$ و بنابراین

$$\Delta_G(i) \leq d(G, i)$$

از سوی دیگر، تعداد مجموعه های احاطه گر i -عضوی هر گراف ساده با n رأس حداکثر برابر با تعداد کل زیرمجموعه های i -عضوی مجموعه رؤس است، یعنی

$$d(G, i) \leq \binom{n}{i}.$$

پس

$$\Delta_G(i) \leq \binom{n}{i}.$$

اکنون اگر $G = K_n$ باشد، طبق نتایج بخش قبل داریم

$$id(K_n, i) = 0 \quad \text{برای } i \geq 2,$$

و

$$d(K_n, i) = \binom{n}{i}.$$

در نتیجه

$$\Delta_{K_n}(i) = \binom{n}{i},$$

و کران بالا حاصل می شود.

برعکس، اگر برای گرافی G داشته باشیم

$$\Delta_G(i) = \binom{n}{i},$$

آنگاه باید همزمان

$$d(G, i) = \binom{n}{i} \quad \text{و} \quad id(G, i) = 0$$

برقرار باشد. شرط اول ایجاب می کند که هر زیرمجموعه i -عضوی از رؤس یک مجموعه احاطه گر باشد، که تنها در صورت کامل بودن گراف ممکن است. بنابراین $G \cong K_n$ و اثبات کامل می شود.

۶. نتایج

۱. نابرابری بنیادین ضرایب: برای هر گراف ساده G و هر اندازه i ، داریم $id(G, i) \leq d(G, i)$.
۲. شرط تساوی: تساوی $id(G, i) = d(G, i)$ برقرار است اگر و تنها اگر هر مجموعه احاطه گر i -عضوی مستقل باشد.
۳. تحلیل گراف های خاص: مطالعه مسیرها، دورها، ستاره ها و گراف های کامل نشان داد که:
 - در گراف های مانند گراف کامل، اختلاف ضرایب بیشتر است.

- در گراف‌های مانند مسیرها، تساوی در اندازه‌های حداقل و حداکثر رخ می‌دهد و اختلاف در اندازه‌های میانی مشاهده می‌شود.

۴. **الگوهای ساختاری:** اختلاف ضرایب $\Delta_G(i) = d(G, i) - id(G, i)$ به طور مستقیم با ساختار و تراکم گراف مرتبط است و می‌تواند به عنوان معیاری برای حساسیت گراف نسبت به قید استقلال استفاده شود.

۵. **روابط بازگشتی:** برای مسیرها و دورها روابط بازگشتی چندجمله‌ای احاطه‌گر و احاطه‌گر مستقل ارائه شد، که امکان محاسبه سریع ضرایب و بررسی الگوهای شمارشی را فراهم می‌آورد.

به عنوان نتایج اصلی در جدول زیر ضرایب چندجمله‌ای احاطه‌گر مستقل $id(G, i)$ و چندجمله‌ای احاطه‌گر گراف‌ها بررسی شده است.
جدول ۱: مقایسه ضرایب چندجمله‌ای احاطه‌گر و احاطه‌گر مستقل.

گراف G	اندازه مجموعه i	$id(G, i)$	$d(G, i)$
کامل K_n	$i = 1$	n	n
	$2 \leq i \leq n$	$\cdot$	$\binom{n}{i}$
مسیر P_n	$i = 1$	n	n
	$1 < i < n$	$< d(P_n, i)$	$d(P_n, i) > 0$
	$i = n$	1	1
دور C_n	$i = 1$	n	n
	$1 < i < n$	$< d(C_n, i)$	$d(C_n, i) > 0$
	$i = n$	$\cdot$ (برای $n > 3$)	1
ستاره $K_{1,n}$	$i = 1$	$n + 1$	$n + 1$
	$2 \leq i \leq n + 1$	$\cdot$	$d(K_{1,n}, i) > 0$

همان‌طور که در جدول ۱ مشاهده می‌شود، برای گراف‌های کامل K_n و ستاره $K_{1,n}$ تنها مجموعه‌های تک‌عضوی هم احاطه‌گر و هم مستقل هستند و بنابراین برای $i = 1$ تساوی برقرار است، اما برای $i \geq 2$ شرط استقلال باعث کاهش تعداد مجموعه‌های احاطه‌گر مستقل شده و نابرابری سخت رخ می‌دهد. در مسیر P_n و دور C_n ، برخی از مجموعه‌های احاطه‌گر بزرگ‌تر مستقل نیستند و به همین دلیل $id(G, i) < d(G, i)$ برای برخی i برقرار است، با این حال، مجموعه‌های حداقل و مجموعه‌های تمام رئوس گراف در موارد خاص تساوی دارند. بنابراین، شرط استقلال نقش تعیین‌کننده‌ای در کاهش ضرایب چندجمله‌ای احاطه‌گر مستقل نسبت به چندجمله‌ای احاطه‌گر دارد و بررسی این تفاوت‌ها اساس تحلیل مقایسه‌ای ما را تشکیل می‌دهد.

جدول مقایسه‌ای ضرایب چندجمله‌ای گراف های $K_3, K_{1,3}, C_4, P_3$. به صورت زیر ترتیب گردیده است.

جدول ۲: مقایسه ضرایب $d(G, i)$ و $id(G, i)$ برای چند گراف کوچک

توضیح کوتاه	$id(G, i)$	$d(G, i)$	i	گراف G
هر رأس به تنهایی مستقل و احاطه‌گر است	۳	۳	۱	P_3
یکی از مجموعه‌های ۲ عضوی مستقل نیست	۱	۲	۲	P_3
مجموعه سه عضوی غیرمستقل است	۰	۱	۳	P_3
فقط دو مجموعه ۲ عضوی مستقل هستند	۲	۴	۲	C_4
مجموعه سه عضوی مستقل ندارد	۰	۴	۳	C_4
مجموعه چهار عضوی مستقل ندارد	۰	۱	۴	C_4
رأس مرکزی یا برگ‌ها احاطه‌گر	۱	۴	۱	$K_{1,3}$
هیچ مجموعه دو عضوی مستقل احاطه‌گر نیست	۰	۶	۲	$K_{1,3}$
فقط مجموعه‌های تک عضوی مستقل هستند	۳	۳	۱	K_3

K_3	۲	۳	۰	هر مجموعه دو عضوی غیرمستقل است
K_3	۳	۱	۰	مجموعه سه عضوی مستقل ندارد

در جدول ۲، مقادیر $d(G, i)$ و $id(G, i)$ برای چند رده مهم گراف ارائه شده است. مشاهده می‌شود که در گراف‌های کامل و ستاره، تنها مجموعه‌های تک‌عضوی مستقل و احاطه‌گر وجود دارند، بنابراین $id(G, i) = 0$ برای $i \geq 2$. در مسیرها و دورها، مجموعه‌های مستقل بزرگ‌تر نیز یافت می‌شوند، اما همواره رابطه $id(G, i) \leq d(G, i)$ برقرار است. این جدول نشان می‌دهد که تفاوت میان دو چندجمله‌ای بسته به ساختار گراف متفاوت است و نابرابری می‌تواند نامساوی سخت strict باشد.

۷. بحث

نتایج به دست آمده نشان می‌دهد که هر چندجمله‌ای احاطه‌گر مستقل زیرمجموعه‌ای از چندجمله‌ای احاطه‌گر است و به همین دلیل ضرایب آن به طور کلی کمتر یا مساوی ضرایب $D(G, x)$ هستند. این تفاوت به ویژه در گراف‌های دارای رأس‌های مجاور زیاد (مانند گراف‌های کامل و ستاره) آشکار است، جایی که قید استقلال باعث کاهش چشمگیر تعداد مجموعه‌های احاطه‌گر مستقل می‌شود. در مسیرها و دورها، اختلاف بین $D(G, x)$ و $D_i(G, x)$ برای اندازه‌های میانی مجموعه‌ها بیشتر دیده می‌شود، که نشان‌دهنده تأثیر ساختار گراف بر امکان تشکیل مجموعه‌های مستقل احاطه‌گر است. مقایسه با مطالعات پیشین نشان می‌دهد که بررسی‌های قبلی بیشتر به تحلیل جداگانه هر چندجمله‌ای محدود بوده و پژوهش حاضر، تحلیل مقایسه‌ای و نظام‌مند میان $D(G, x)$ و $D_i(G, x)$ را ارائه می‌دهد. این رویکرد امکان شناسایی الگوهای شمارشی و روابط جبری بین این دو چندجمله‌ای را فراهم می‌آورد و درک بهتری از تأثیر قید استقلال بر ساختار مجموعه‌های احاطه‌گر ارائه می‌کند. علاوه بر ارزش نظری، این نتایج کاربردهایی در شبکه‌ها و بهینه‌سازی دارند، زیرا شناسایی مجموعه‌های مستقل احاطه‌گر می‌تواند در طراحی الگوریتم‌ها و تحلیل حساسیت شبکه‌ها مفید باشد. با وجود این، محدودیت‌های مطالعه شامل تمرکز بر کلاس‌های خاص گراف و عدم بررسی گراف‌های بزرگ یا تصادفی است.

۸. نتیجه گیری

در این مقاله، رابطه مقایسه‌ای میان چندجمله‌ای احاطه‌گر $D(G, x)$ و چندجمله‌ای احاطه‌گر مستقل $D_i(G, x)$ مورد بررسی قرار گرفت. نشان داده شد که برای هر گراف ساده G و هر i ، نابرابری بنیادین $id(G, i) \leq d(G, i)$ همواره برقرار است و شرط لازم و کافی برای تساوی این دو کمیت به صورت دقیق مشخص گردید. با معرفی اختلاف ضرایب $\Delta_G(i) = d(G, i) - id(G, i)$ ، امکان تحلیل کمی تأثیر قید استقلال بر شمارش مجموعه‌های احاطه‌گر فراهم شد و نشان داده شد که این اختلاف به ساختار گراف وابستگی مستقیم دارد. به‌ویژه، گراف کامل به عنوان حالتی بیشینه، بیشترین اختلاف ممکن میان ضرایب دو چندجمله‌ای را ایجاد می‌کند.

بررسی گراف‌های مانند مسیرها، دورها، ستاره‌ها و گراف‌های کامل نشان داد که اختلاف ضرایب محدودتر است، در حالی که در گراف‌های چگال، قید استقلال نقش تعیین‌کننده‌تری ایفا می‌کند. این نتایج بیانگر آن است که چندجمله‌ای احاطه‌گر مستقل ابزاری حساس به ساختار گراف بوده و اطلاعات ترکیبی دقیق‌تری نسبت به چندجمله‌ای احاطه‌گر ارائه می‌دهد.

پیشنهاد برای تحقیقات آینده. بررسی رفتار اختلاف ضرایب $\Delta_G(i)$ در رده‌های خاص تر گراف‌ها مانند گراف‌های صفحه‌ای، گراف‌های تصادفی یا گراف‌های منتظم، مطالعه ریشه‌های دو چندجمله‌ای و ارتباط آن‌ها با پارامترهای ساختاری گراف، و نیز تعمیم این رویکرد به گونه‌های دیگر احاطه‌گری می‌تواند مسیرهای پژوهشی مناسبی برای مطالعات آینده باشد.

۹. مأخذ

مهربان، مظهرالدین. (۱۴۰۴). پایداری برخی از انواع اعداد احاطه‌گر گراف‌ها. رساله دکترا، دانشکده ریاضی، دانشگاه یزد.

Alikhani, S., Mehraban, M., Zakharov, A., & Golmohammadi, H. R. (n.d.). Independent domination stability in graphs. *J. Discrete Math. Sci. and Cryptog.*, to appear.

Alikhani, S., & Piri, M. R. (2023). On the edge chromatic vertex stability number of graphs. *AKCE Int. J. Graphs Comb.*, 20(1), 29–34.

Alikhani, S., & Soltani, S. (2018). Stabilizing the distinguishing number of a graph. *Commun. Algebra*, 46(12), 5460–5468.

Alikhani, S., Mehraban, M., & Soltani, S. (2025, May 28–29). On the D -edge stability number and γ_i -edge stability number of a graph. In *13th Graph Theory and Algebraic Combinatorics Conference (GTACC13)*, Shahid Rajaei Teacher Training University, Tehran.

- Andrew, P., & Beng, W. (2022). Independent bondage number of planar graphs with minimum degree at least 3. *Discrete Math.*, 345, 113072.
- Asemian, G., Jafari Rad, N., Tehranian, A., & Rasouli, H. (2021). On the total Roman domination stability in graphs. *AKCE Int. J. Graphs Comb.*, 18(3), 166–172.
- Bauer, D., Harary, F., Nieminen, J., & Suffel, C. L. (1983). Domination alteration sets in graphs. *Discrete Math.*, 47(2–3), 153–161.
- Bondy, J. A., & Murty, U. S. R. (2008). *Graph theory* (Graduate Texts in Mathematics, 244). Springer, New York.
- Bujtás, C., & Jaskó, S. (2018). Bounds on the 2-domination number. *Discrete Appl. Math.*, 242, 4–15.
- Cao, J., Lin, W., & Shi, M. (2009). Total domination number of generalized Petersen graphs. *Intelligent Inf. Manag.*, 1(1), 14–17.
- Comtet, L. (1974). *Advanced combinatorics*. Reidel Pub. Co., Boston.
- Dunbar, J. E., Grossman, J. W., Hattingh, J. H., Hedetniemi, S. T., & McRae, A. A. (1997). On weakly connected domination in graphs. *Discrete Math.*, 167/168, 261–269.
- Edward, M., Finbow, A., MacGillivray, G., & Nasserar, S. (2018). Independent domination bicritical graphs. *Australas. J. Comb.*, 72, 446–471.
- Erdős, P., Rényi, A., & Sós, V. T. (1966). On a problem of graph theory. *Studia Sci. Math. Hungar.*, 1, 215–235.
- Erwin, D. (2004). Dominating broadcasts in graphs. *Bull. Inst. Comb. Appl.*, 42, 89–105.
- Frucht, R., & Harary, F. (1970). On the corona of two graphs. *Aequationes Math.*, 4, 322–325.
- Fulman, J., Hanson, D., & MacGillivray, G. (1995). Vertex domination-critical graphs. *Networks*, 25(2), 41–43.
- Garey, M. R., & Johnson, D. S. (1980). Computers and intractability: A guide to the theory of NP-completeness. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 3(2), 898–904.
- Goddard, W., & Henning, M. A. (2013). Independent domination in graphs: A survey and recent results. *Discrete Math.*, 313(7), 839–854.
- Goddard, W., Henning, M. A., & McPillan, C. A. (2014). The disjunctive domination number of a graph. *Quaestiones Math.*, 37, 547–561.
- Gorzowska, A., Henning, M. A., Pilśniak, M., & Tumidajewicz, E. (2022). Paired domination stability in graphs. *Ars Math. Contemp.*, 22, P2.04. <https://doi.org/10.26493/1855-3974.2522.eb>.

- Hansberg, A., & Volkmann, L. (2008). On graphs with equal domination and 2-domination numbers. *Discrete Math.*, 308, 2277–2281.
- Harinarayanan, C. V. R., Ponnappan, C., Subbiah, S. S., & Swaminathan, V. (2010). A note on strong domination in graphs. *South. Asian B. Math.*, 34, 91–100.
- Haynes, T. W., Hedetniemi, S. T., & Slater, P. J. (1998). *Fundamentals of domination in graphs*. Marcel Dekker, Inc., New York.
- Henning, M. A., & Krzywkowski, M. (2018). Total domination stability in graphs. *Discrete Appl. Math.*, 236, 246–255.
- Jafari Rad, N., Sharifi, E., & Krzywkowski, M. (2016). Domination stability in graphs. *Discrete Math.*, 339, 1909–1914.
- Jahari, S., & Alikhani, S. (2021). On the independent domination polynomial of a graph. *Discrete Appl. Math.*, 289, 416–426.
- Jahari, S., & Alikhani, S. (2022). More on the enumeration of some kind of dominating sets in cactus chains. *Mathematics Interdisciplinary Research*, 7, 217–237.
- Mehraban, M., & Alikhani, S. (n.d.). Independent domination bondage number in graphs. *J. Inform. Optim. Sci.*, to appear.
- Mehraban, M., & Alikhani, S. (n.d.). Stability of 2-domination number of a graph. Submitted